



TITLE:

需要の不確実性を考慮したロバストサプライチェーン均衡モデル (数理最適化の発展: モデル化とアルゴリズム)

AUTHOR(S):

成島, 康史; 平野, 達也

---

CITATION:

成島, 康史 ...[et al]. 需要の不確実性を考慮したロバストサプライチェーン均衡モデル (数理最適化の発展: モデル化とアルゴリズム). 数理解析研究所講究録 2018, 2069: 207-218

ISSUE DATE:

2018-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/241981>

RIGHT:

## 需要の不確実性を考慮した ロバストサプライチェーン均衡モデル

横浜国立大学 成島康史 (Yasushi NARUSHIMA)

Yokohama National University

富士通エフ・アイ・ピー株式会社 平野達也 (Tatsuya HIRANO)

Fujitsu FIP Corporation

### 1 はじめに

サプライチェーンマネジメントは企業経営におけるキーファクターとして、近年注目が高まっている。製品の原材料の購入から、顧客への販売まで全てのプロセスを含むサプライチェーンでは、複数の企業が密接に絡み合っており、各主体の要求する事柄も異なるため、非常に複雑な状況となる。そのため、そのような状況を分析するために、サプライチェーンにおける数理モデルは古くから盛んに研究されてきた。複数の企業を含むような大きなサプライチェーンでは、しばしば企業間で競合が生じることがある。そのような競合状態における均衡状態の分析も盛んであり、ゲーム理論などの均衡分析を用いて、様々な研究がされてきた。例えば、Nagurney et al. [14] はサプライチェーンネットワーク均衡 (Supply Chain Network Equilibrium, SCNE) モデルを提案した。SCNE モデルでは、複数の製造業者と小売業者と市場により構成されるネットワークについて、均衡状態における製品の流通量と価格について分析が行われている。その後、SCNE モデルを拡張したモデルがいくつか提案されている [6, 11, 17, 18]。例えば、Dong et al. [6] は、Nagurney et al. の SCNE モデルでは需要の不確実性が考慮されていないという点を改良するために、市場における需要の不確実性を考慮したモデルを提案した。また、山田ら [17] は製造業者と小売業者と市場に加え、運送業者の 4 者によって構成される SCNE モデルを提案している。

一方、近年では事業継続計画などといった活動の高まりとともに、サプライチェーンにおけるリスクマネジメントが注目されている。サプライチェーンにおける数理モデルとしては、そのリスクを不確実性ととらえてロバストなサプライチェーンのためのモデルの研究が盛んにおこなわれている (例えば, [2, 5, 11, 12, 15] など)。SCNE モデルとリスクマネジメントを扱った研究として、平野・成島 [11] は、ロバスト最適化やロバストな均衡分析 (例えば, [1, 3, 4] などを参照) の考えに基づき、各主体間の不確実性に着目し、自分以外の主体の行動を正確には知ることが出来ないという仮定の下で、最悪の状況を想定して意思決定を行うようなロバスト SCNE モデルを考えた。しかしながら、平野・成島の研究では、Nagurney et al. の SCNE モデルと同様に市場における不確実性は考慮していなかった。よって本研究では、Dong et al. [6] と平野・成島 [11] の考えを組み合わせ、市場における需要の不確実性を考慮したロバスト SCNE モデルを提案する。

### 2 需要の不確実性を考慮した RSCNE モデル

本研究では、サプライチェーンの上流から順に、 $m$  個の製造業者、 $n$  個の小売業者、 $n$  個の市場が存在するネットワークを想定する。製造業者は製品を製造し、それを小売業者へ供給する。小売業者と市場は 1 対 1 に対応しており、小売業者は仕入れた製品を、対応する一つの市場へ販売する (図 1 参照)。製造業者は小売業者への供給量を、小売業者は製造業者への発注量と市場への供給量

を決定することで、各々の費用を最小化する。市場では、後述する均衡条件を満たすように、小売業者からの購入量と市場価格が決定される。

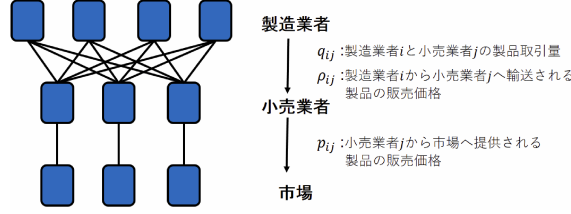


図 1: サプライチェーンネットワークのイメージ

以下で、定式化に必要な記号を以下のように定義する (ただし,  $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$  とする):

- $q_{ij}$  : 製造業者  $i$  と小売業者  $j$  による製品取引量,  
 $\rho_{ij}$  : 製造業者  $i$  から小売業者  $j$  へ配送される製品の販売価格,  
 $p_j$  : 小売業者  $j$  から市場  $j$  へ提供される製品の販売価格.

これらの変数に対し、変数をまとめたベクトルを以下のようにあらわす:

$$\begin{aligned}
 q_i &:= (q_{i1}, \dots, q_{in})^T \in \mathbb{R}^n, \\
 q_{-j} &:= (q_{1j}, \dots, q_{mj})^T \in \mathbb{R}^m, \\
 q_{-i} &:= (q_1^T, \dots, q_{i-1}^T, q_{i+1}^T, \dots, q_m^T)^T \in \mathbb{R}^{n(m-1)}, \\
 q_{-j} &:= (q_1^T, \dots, q_{j-1}^T, q_{j+1}^T, \dots, q_n^T)^T \in \mathbb{R}^{m(n-1)}, \\
 \rho_i &:= (\rho_{i1}, \dots, \rho_{in})^T \in \mathbb{R}^n, \\
 \rho_{-j} &:= (\rho_{1j}, \dots, \rho_{mj})^T \in \mathbb{R}^m.
 \end{aligned}$$

ここで,  $q_i$  は製造業者  $i$  の生産量 (つまり, 戦略) を表し,  $q_{-j}$  は小売業者  $j$  の戦略を表す。また,  $q_{-i}$  は製造業者  $i$  における製造業者  $i$  以外の製造業者の戦略を表し,  $q_{-j}$  は小売業者  $j$  における小売業者  $j$  以外の小売業者の戦略を表す。次に、製造業者や小売業者の費用を表す関数などを以下のように定義する:

- $f_i(q_i, q_{-i})$  : 製造業者  $i$  の製品製造費用関数,  
 $c_{ij}(q_{ij})$  : 製造業者  $i$  に関する小売業者  $j$  との取引費用関数,  
 $h_j(q_j, q_{-j})$  : 小売業者  $j$  の製品取扱費用関数,  
 $\hat{d}_j(p_j)$  : 市場  $j$  の製品需要.

製造業者の製品製造費用は他の製造業者の変数 (戦略) に依存し, 小売業者の製品取り扱い費用関数は他の小売業者の変数に依存しているため, このネットワークは競合的なネットワークとなっている。

## 2.1 製造業者について

本節では、製造業者の解く最適化問題を定式化し、その最適性条件を求める。以下では、製造業者  $i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) の製造費用関数  $f_i$  を以下の通りに定義する:

$$f_i(q_i, q_{-i}) := \left( \sum_{j=1}^n q_{ij} \right) \left( a_{ii} + b_{i1} \sum_{j=1}^n q_{1j} + \dots + b_{ii} \sum_{j=1}^n q_{ij} + \dots + b_{im} \sum_{j=1}^n q_{mj} \right).$$

ただし,  $a_{ii}, b_{is}$  ( $s = 1, \dots, m$ ) は非負の定数とする.  $a_i \in \mathbb{R}^n$  を全ての成分に  $a_{ii}$  を持つベクトル,  $B_{is} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ( $s = 1, \dots, m$ ) を全ての成分に  $b_{is}$  を持つ行列とすると,

$$f_i(q_i, q_{-i}) := a_i^T q_i + q_i^T B_{ii} q_i + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^m q_i^T B_{il} q_l.$$

となる. このときの製造業者  $i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) の総利益のマイナス倍 (総費用) を  $\Psi_i(q_i, q_{-i})$  とおけば,

$$\Psi_i(q_i, q_{-i}) = -\rho_i^T q_i + \sum_{j=1}^n c_{ij}(q_{ij}) + a_i^T q_i + q_i^T B_{ii} q_i + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^m q_i^T B_{il} q_l.$$

となる. ここで, 製造業者  $i$  は自分以外の製造業者の決定変数を正確に知ることが出来ず, 相手の戦略を  $\tilde{q}_l = q_l + M_{il} \Delta u_l$  ( $l = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, m$ ) といった形式で認識するものとする. さらに自身にとって最悪のケースが生じたときの総費用を最小化するものとする. ただし,  $M_{il} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  を正定値対称行列であり,  $\Delta u_l$  は  $\|\Delta u_l\| \leq 1$  を満たすものとする. この時, 製造業者  $i$  の製造業者  $l$  ( $l = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, m$ ) に対する不確実性を表す集合  $U_{il}$  は

$$U_{il} := \{\tilde{q}_l = q_l + M_{il} \Delta u_l \mid \|\Delta u_l\| \leq 1\}$$

と表すことができる. ここで, 最悪のケースが起きたときの総費用を  $\tilde{\Psi}_i(q_i, q_{-i})$  とおくと,

$$\tilde{\Psi}_i(q_i, q_{-i}) = \max \{ \Psi_i(q_i, \tilde{q}_{-i}) \mid \tilde{q}_{-i} \in U_{-i} \},$$

となる. ただし,  $\tilde{q}_{-i} := ((\tilde{q}_1)^T, \dots, (\tilde{q}_{i-1})^T, (\tilde{q}_{i+1})^T, \dots, (\tilde{q}_m)^T)^T$ ,  $U_{-i} := \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^m U_{il}$  である. 通常は  $\tilde{\Psi}_i(q_i, q_{-i})$  は  $\Psi_i(q_i, \tilde{q}_{-i})$  の上限 (sup) として表されるが, 今回は  $\Psi_i(q_i, \tilde{q}_{-i})$  が連続で, かつ  $U_{-i}$  がコンパクトであるので,  $\tilde{\Psi}_i(q_i, q_{-i})$  は  $\Psi_i(q_i, \tilde{q}_{-i})$  の最大値として記しても差し支えない. したがって, 製造業者  $i$  が最小化すべき総費用関数は

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_i(q_i, q_{-i}) &= -\rho_i^T q_i + \sum_{j=1}^n c_{ij}(q_{ij}) + a_i^T q_i \\ &\quad + q_i^T B_{ii} q_i + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^m q_i^T B_{il} q_l + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^m \max_{\|\Delta u_l\| \leq 1} q_i^T B_{il} M_{il} \Delta u_l. \end{aligned}$$

となる.  $\max_{\|\Delta u_l\| \leq 1} q_i^T B_{il} M_{il} \Delta u_l = \|M_{il}^T B_{il}^T q_i\| = \|M_{il} B_{il} q_i\|$  であるから, 製造業者  $i$  の戦略は次の二次錐計画問題の解となる:

$$\begin{aligned} \min_{q_i, s_i} \quad & \hat{\Psi}_i(q_i, q_{-i}, s_i) = -\rho_i^T q_i + \sum_{j=1}^n c_{ij}(q_{ij}) + a_i^T q_i + q_i^T B_{ii} q_i + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^m q_i^T B_{il} q_l + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^m s_{il} \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq q_i, \|M_{il} B_{il} q_i\| \leq s_{il} \quad (l = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, m). \end{aligned} \quad (1)$$

ここで  $s_i := (s_{i1}, \dots, s_{ii-1}, s_{ii+1}, \dots, s_{im})^T$  である. 問題 (1) の実行可能領域を  $T_i$  とおくと,  $T_i$  は次の通りとなる:

$$T_i := \left\{ (q_i^T, s_i^T)^T \mid 0 \leq q_i, \|M_{il} B_{il} q_i\| \leq s_{il} \quad (l = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, m) \right\}.$$

以下では, 取引費用関数  $c_{ij}(q_{ij})$  は凸関数であると仮定する.  $f_i(q_i, q_{-i})$  は  $q_i$  について凸であるので,  $\hat{\Psi}_i$  は凸関数である. また  $T_i$  は空でない凸集合であるから, (1) は凸計画問題である. したがって (1) の最適性条件は

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \left( \frac{\partial f_i(q_i^*, q_{-i}^*)}{\partial q_{ij}} + \frac{dc_{ij}(q_{ij}^*)}{dq_{ij}} - \rho_{ij} \right) \times (q_{ij} - q_{ij}^*) \right\} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^m (s_{il} - s_{il}^*) \geq 0, \quad (2)$$

$$\forall (q_i^T, s_i^T)^T \in T_i.$$

となる。ただし、 $(q_i^*, s_i^*)$  を (1) の最適解とする。各製造業者の最適性条件 (2) を全ての製造業者についてまとめると次式が得られる:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left\{ \left( \frac{\partial f_i(q_i^*, q_{-i}^*)}{\partial q_{ij}} + \frac{dc_{ij}(q_{ij}^*)}{dq_{ij}} - \rho_{ij} \right) (q_{ij} - q_{ij}^*) \right\} + \sum_{i=1}^m \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^m (s_{il} - s_{il}^*) \geq 0, \quad (3)$$

$$\forall (q^T, s^T)^T \in T.$$

ただし

$$T := \left\{ (q^T, s^T)^T \mid 0 \leq q, \|M_{il} B_{il} q_{il}\| \leq s_{il} \ (i = 1, \dots, m, \ l = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, m) \right\},$$

とし、 $q := (q_1^T, \dots, q_m^T)^T, s := (s_1^T, \dots, s_m^T)^T$  とする。集合  $T$  の定義より  $q \geq 0$  であるため、条件 (3) は、 $q_{ij}^*$  が正であるならば  $\rho_{ij} = \frac{\partial f_i(q_i^*, q_{-i}^*)}{\partial q_{ij}} + \frac{dc_{ij}(q_{ij}^*)}{dq_{ij}}$  が成立し、 $q_{ij}^*$  が 0 であるならば、 $\rho_{ij} \leq \frac{\partial f_i(q_i^*, q_{-i}^*)}{\partial q_{ij}} + \frac{dc_{ij}(q_{ij}^*)}{dq_{ij}}$  が成立することを意味している。

## 2.2 小売業者の問題

本節では、小売業者の解く問題を定式化し、その最適性条件を導出する。まず、小売業者  $j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) の製品取扱費用関数  $h_j$  を製造業者における製造費用関数  $f_i$  と同様に以下で定義する:

$$h_j(q_{-j}, q_{-j}) := \left( \sum_{i=1}^m q_{ij} \right) \left( \delta_{jj} + \gamma_{j1} \sum_{i=1}^m q_{i1} + \dots + \gamma_{jj} \sum_{i=1}^m q_{ij} + \dots + \gamma_{jn} \sum_{i=1}^m q_{in} \right). \quad (4)$$

ここで  $\delta_{jj}$  と  $\gamma_{jt}$  ( $t = 1, \dots, n$ ) は非負の定数であり、 $\delta_j \in \mathbb{R}^m$  を全ての成分に  $\delta_{jj}$  を持つベクトル、 $\Gamma_{jt} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  を全ての成分に  $\gamma_{jt}$  を持つ行列とすると、(4) は

$$h_j(q_{-j}, q_{-j}) = \delta_j^T q_j + q_j^T \Gamma_{jj} q_j + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n q_j^T \Gamma_{jr} q_r \quad (5)$$

であらわされる。また、製品の需要  $\hat{d}_j(p_j)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) は、パラメータ  $p_j$  を含む確率密度関数  $\mathcal{F}_j(x, p_j)$  を伴った確率変数であるとする。すなわち、

$$P_j(x, p_j) = P[\hat{d}(p_j) \leq x] = \int_0^x \mathcal{F}_j(x, p_j) dx$$

であるとする。

以下では簡単のために小売業者  $j$  の総取引量を  $Q_j = \sum_{i=1}^m q_{ij}$  で表すこととする。小売業者は仕入か需要のうち、小さいほうしか売ることができないため、小売業者  $j$  の販売量は  $\min \{Q_j, \hat{d}_j(p_j)\}$  となる。また、在庫過剰  $\Delta_j^+$  と欠品量  $\Delta_j^-$  はそれぞれ以下ようになる:

$$\Delta_j^+ := \max \{0, Q_j - \hat{d}_j(p_j)\}, \quad \Delta_j^- := \max \{0, \hat{d}_j(p_j) - Q_j\}.$$

また、 $\Delta_j^+$  と  $\Delta_j^-$  の期待値を次の通りに記す:

$$e_j^+(Q_j, p_j) \equiv E(\Delta_j^+) = \int_0^{Q_j} (Q_j - x) \mathcal{F}_j(x, p_j) dx,$$

$$e_j^-(Q_j, p_j) \equiv E(\Delta_j^-) = \int_{Q_j}^{\infty} (x - Q_j) \mathcal{F}_j(x, p_j) dx.$$

ここで在庫過剰と品切れに対するペナルティをそれぞれ  $\lambda_j^+, \lambda_j^-$  として与え、これらに関する損失額の期待値を、

$$E\left(\lambda_j^+ \Delta_j^+ + \lambda_j^- \Delta_j^-\right) = \lambda_j^+ e_j^+(Q_j, p_j) + \lambda_j^- e_j^-(Q_j, p_j)$$

とする。売上は  $p_j \min\{Q_j, \hat{d}_j(p_j)\}$  となるから、小売業者の総費用（総利益のマイナス倍）の期待値は

$$-\Phi_j(q_j, q_{-j}, p_j) = E\left(p_j \min\{Q_j, \hat{d}_j(p_j)\}\right) - E\left(\lambda_j^+ \Delta_j^+ + \lambda_j^- \Delta_j^-\right) - h_j(q_j, q_{-j}) - \rho_j^T q_j$$

となる。ここで、 $\hat{d}_j(p_j)$  の期待値を  $d_j(p_j)$  で表すと、 $\min\{Q_j, \hat{d}_j(p_j)\} = \hat{d}_j(p_j) - \Delta_j^-$  であるから、(5) より

$$\begin{aligned} \Phi_j(q_j, q_{-j}, p_j) &= -p_j d_j(p_j) + p_j e_j^-(Q_j, p_j) + \lambda_j^+ e_j^+(Q_j, p_j) + \lambda_j^- e_j^-(Q_j, p_j) \\ &\quad + \rho_j^T q_j + \delta^T q_j + q_j^T \Gamma_{jj} q_j + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n q_j^T \Gamma_{jr} q_r \end{aligned}$$

となる。ここで小売業者も製造業者と同様に、自分以外の小売業者の決定変数を正確に知ることができず、誤差を含んだ状態で予測し、自身にとって最悪のケースが起きたときの総費用を最小化するものとする。

つまり、小売業者  $r$  ( $r = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n$ ) の決定変数  $q_r$  を  $\tilde{q}_r := q_r + N_{jr} \Delta v_r$  ( $r = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n$ ) という形式でしか知ることが出来ないものとする。ただし、 $N_{jr} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  は正定値対称行列であり、 $\Delta v_r \in \mathbb{R}^m$  は  $\|\Delta v_r\| \leq 1$  を満たすものとする。この時、小売業者  $j$  の小売業者  $r$  ( $r = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n$ ) に対する不確実性を表す集合  $V_{-j}$  は

$$V_{jr} := \{\tilde{q}_r = q_r + N_{jr} \Delta v_r \mid \|\Delta v_r\| \leq 1\}$$

であらわされる。ここで、小売業者  $j$  にとって最悪のケースが生じたときの総費用を  $\tilde{\Phi}_j(q_j, q_{-j}, p_j)$  とおくと、

$$\tilde{\Phi}_j(q_j, q_{-j}, p_j) = \max\{\Phi_j(q_j, \tilde{q}_{-j}, p_j) \mid \tilde{q}_{-j} \in V_{-j}\}$$

となる。ただし、 $\tilde{q}_{-j} := ((\tilde{q}_1)^T, \dots, (\tilde{q}_{j-1})^T, (\tilde{q}_{j+1})^T, \dots, (\tilde{q}_n)^T)^T$ 、 $V_{-j} := \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n V_{jr}$  である。このとき、小売業者  $j$  が最小化すべき関数は次の通りである：

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_j(q_j, q_{-j}, p_j) &= -p_j d_j(p_j) + p_j e_j^-(Q_j, p_j) + \lambda_j^+ e_j^+(Q_j, p_j) + \lambda_j^- e_j^-(Q_j, p_j) \\ &\quad + \rho_j^T q_j + \delta^T q_j + q_j^T \Gamma_{jj} q_j + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n q_j^T \Gamma_{jr} q_r + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n \max_{\|\Delta v_r\| \leq 1} q_j^T \Gamma_{jr} N_{jr} \Delta v_r. \end{aligned}$$

製造業者の場合と同様に考えると、小売業者  $j$  の戦略は以下の二次錐計画問題の解となる：

$$\begin{aligned} \min_{q_j, t_j} \quad & \hat{\Phi}_j(q_j, q_{-j}, p_j, t_j) = -p_j d_j(p_j) + p_j e_j^-(Q_j, p_j) + \lambda_j^+ e_j^+(Q_j, p_j) + \lambda_j^- e_j^-(Q_j, p_j) \\ & \quad + \rho_j^T q_j + \delta^T q_j + q_j^T \Gamma_{jj} q_j + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n q_j^T \Gamma_{jr} q_r + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n t_{jr}, \quad (6) \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq q_j, \|N_{jr} \Gamma_{jr} q_j\| \leq t_{jr} \quad (r = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n). \end{aligned}$$

ただし、 $t_j := (t_{j1}, \dots, t_{jj-1}, t_{jj+1}, \dots, t_{jn})^T$  である。問題 (6) の実行可能領域を  $S_j$  とおくと、

$$S_j := \left\{ (q_j^T, t_j^T)^T \mid 0 \leq q_j, \|N_{jr} \Gamma_{jr} q_j\| \leq t_{jr} \ (r = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n) \right\}$$

となる。\$S\_j\$ は空でない凸集合であり、\$\hat{\Phi}\_j\$ は \$(q\_j, t\_j)\$ に関して凸であるから、(6) は凸計画問題となる。ここで、単純な計算から

$$\frac{\partial e_j^+(Q_j, p_j)}{\partial q_{ij}} = P_j(Q_j, p_j), \quad \frac{\partial e_j^-(Q_j, p_j)}{\partial q_{ij}} = P_j(Q_j, p_j) - 1$$

となるため、問題 (6) の最適性条件は次の通りとなる:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \left\{ \lambda_j^+ P_j(Q_j^*, p_j^*) - (\lambda_j^- + p_j^*)(1 - P_j(Q_j^*, p_j^*)) + \frac{\partial h_j(q_j^*, q_{-j}^*)}{\partial q_{ij}} + \rho_{ij} \right\} (q_{ij} - q_{ij}^*) \\ + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n (t_{jr} - t_{jr}^*) \geq 0, \quad \forall (q_j^T, t_j^T)^T \in S_j. \end{aligned} \quad (7)$$

さらに、最適性条件 (7) を全ての小売業者についてまとめることで、次式を得る:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \left\{ \lambda_j^+ P_j(Q_j^*, p_j^*) - (\lambda_j^- + p_j^*)(1 - P_j(Q_j^*, p_j^*)) + \frac{\partial h_j(q_j^*, q_{-j}^*)}{\partial q_{ij}} + \rho_{ij} \right\} (q_{ij} - q_{ij}^*) \\ + \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n (t_{jr} - t_{jr}^*) \geq 0, \quad \forall (q^T, t^T)^T \in S. \end{aligned} \quad (8)$$

ただし、\$t := (t\_1^T, \dots, t\_n^T)^T\$ とし、

$$S := \left\{ (q^T, t^T)^T \mid 0 \leq q, \|N_{jr} \Gamma_{jr} q_j\| \leq t_{jr} \ (r = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n, j = 1, \dots, n) \right\}$$

とする。

### 2.3 市場の均衡条件

本論文では、Dong et al. [6] に倣い、市場 \$j\$ (\$j = 1, \dots, n\$) では、均衡状態において、以下の条件が満たすような \$p\_j\$ (\$j = 1, \dots, n\$) が選択されるものと仮定する:

$$\begin{cases} \hat{d}_j(p_j) \leq \sum_{i=1}^m q_{ij} & \text{almost everywhere, if } p_j = 0, \\ \hat{d}_j(p_j) = \sum_{i=1}^m q_{ij} & \text{almost everywhere, if } p_j > 0. \end{cases} \quad (9)$$

上記の均衡条件は、よく知られた経済的な均衡条件に対応している。詳細は [6, 13] などを参照されたい。なお、(9) を満たす \$p\_j\$ を求めることは、以下の不等式を満たす \$p\_j^\*\$ を求めることと等価である:

$$\sum_{j=1}^n \{ (Q_j^* - d_j(p_j^*)) (p_j - p_j^*) \} \geq 0, \quad \forall p \in \mathbb{R}_+^n.$$

ただし、\$p = (p\_1, \dots, p\_n)^T\$ とする。

## 2.4 変分不等式問題への定式化

上述した最適性条件 (3), (8) と均衡条件 (9) より, 定式化した均衡問題と等価な以下の変分不等式問題が得られる:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[ \left\{ \frac{\partial f_i(q_i^*, q_{-i}^*)}{\partial q_{ij}} + \frac{\partial c_{ij}(q_{ij}^*)}{\partial q_{ij}} + \frac{\partial h_j(q_j^*, q_{-j}^*)}{\partial q_{ij}} + \lambda_j^+ P_j(Q_j^*, p_j^*) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - (\lambda_j^- + p_j^*) (1 - P_j(Q_j^*, p_j^*)) \right\} (q_{ij} - q_{ij}^*) \right] \\ & + \sum_{j=1}^n \{ (Q_j^* - d_j(p_j^*)) (p_j - p_j^*) \} + \sum_{i=1}^m \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^m (s_{il} - s_{il}^*) + \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n (t_{jr} - t_{jr}^*) \geq 0, \\ & \forall x = (q^T, p^T, s^T, t^T)^T \in K. \end{aligned} \quad (10)$$

ただし

$$\begin{aligned} K = \{ (q^T, p^T, s^T, t^T)^T \mid & 0 \leq q_i, 0 \leq p_j, \|M_{il} B_{il} q_i\| \leq s_{il}, \|N_{jr} \Gamma_{jr} q_j\| \leq t_{jr} \\ & (i = 1, \dots, m, \quad l = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, m, \\ & \quad j = 1, \dots, n, \quad r = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n) \} \end{aligned}$$

とする. 今後は, この変分不等式問題を

$$\text{Find } x^* \in K \text{ such that } F(x^*)^T (x - x^*) \geq 0, \quad \forall x \in K \quad (11)$$

と表記する. ただし,

$$F(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(q_1, q_{-1})}{\partial q_{11}} + \frac{\partial c_{11}(q_{11})}{\partial q_{11}} + \frac{\partial h_1(q_1, q_{-1})}{\partial q_{11}} + \lambda_1^+ P_1(Q_1, p_1) - (\lambda_1^- + p_1) (1 - P_1(Q_1, p_1)) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_1(q_1, q_{-1})}{\partial q_{1n}} + \frac{\partial c_{1n}(q_{1n})}{\partial q_{1n}} + \frac{\partial h_n(q_n, q_{-n})}{\partial q_{1n}} + \lambda_n^+ P_n(Q_n, p_n) - (\lambda_n^- + p_n) (1 - P_n(Q_n, p_n)) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m(q_m, q_{-m})}{\partial q_{m1}} + \frac{\partial c_{m1}(q_{m1})}{\partial q_{m1}} + \frac{\partial h_1(q_1, q_{-1})}{\partial q_{m1}} + \lambda_1^+ P_1(Q_1, p_1) - (\lambda_1^- + p_1) (1 - P_1(Q_1, p_1)) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m(q_m, q_{-m})}{\partial q_{mn}} + \frac{\partial c_{mn}(q_{mn})}{\partial q_{mn}} + \frac{\partial h_n(q_n, q_{-n})}{\partial q_{mn}} + \lambda_n^+ P_n(Q_n, p_n) - (\lambda_n^- + p_n) (1 - P_n(Q_n, p_n)) \\ Q_1 - d_1(p_1) \\ \vdots \\ Q_n - d_n(p_n) \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

である.

## 3 変分不等式問題の解の存在性・唯一性

本節では, 2 節で定式化した変分不等式問題 (10) の解の存在性と唯一性を議論する. まず最初に, 解の存在性について考える. 以下では十分大きな正の定数  $b_1, b_2, b_3, b_4$  に対して, 集合  $K^b$  を次の通りに定義する.

$$\begin{aligned} K = \{ (q^T, p^T, s^T, t^T)^T \mid & 0 \leq q_{ij} \leq b_1, 0 \leq p_j \leq b_2, \|M_{il} B_{il} q_i\| \leq s_{il} \leq b_3, \|N_{jr} \Gamma_{jr} q_j\| \leq t_{jr} \leq b_4 \\ & (i = 1, \dots, m, \quad l = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad r = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n) \} \end{aligned}$$



$b_1$ – $b_4$  が十分大きい場合,  $K^b$  は空でないコンパクト集合となるため, 以下の変分不等式問題

$$\text{Find } x^b \in K^b \text{ such that } F(x^b)^T(x - x^b) \geq 0, \forall x \in K^b \quad (12)$$

は少なくとも一つの解を持つ. ここで, 以下の補題を紹介する [13].

**補題 1.** 変分不等式問題 (10) が解を持つための必要十分条件は, 変分不等式問題 (12) が

$$\begin{aligned} q_{ij}^b < b_1, \quad p_j^b < b_2, \quad s_{il}^b < b_3, \quad t_{jr}^b < b_4 \\ \text{for all } i = 1, \dots, m, \quad l = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, m, \\ j = 1, \dots, n, \quad r = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n \end{aligned}$$

を満たすような解  $x^b = ((q^b)^T, (p^b)^T, (s^b)^T, (t^b)^T)^T$  を持つことである.

定理の証明のために以下の条件を満たす正の定数  $\eta$  を定義する:

$$\eta \geq \max_{\forall i, j, q_{ij} \in [0, b_1]} \left\{ \frac{\partial f_i(q_i, q_{-i})}{\partial q_{ij}} + \frac{\partial c_{ij}(q_{ij})}{\partial q_{ij}} + \frac{\partial h_j(q_j, q_{-j})}{\partial q_{ij}} + \lambda_j^+ \right\}$$

ここで,  $f_i, c_{ij}, h_j$  はそれぞれ連続微分可能であり, 考えている領域がコンパクトであるため,  $\eta$  は定義可能である. ここで, 解の存在性を保証するために以下の仮定を与える.

**仮定 1.** ある正の定数  $N$  に対し, 定数  $\epsilon \in (0, 1]$  が存在して,  $\forall q_{ij} \leq N$  と  $\forall p_j \leq \eta/\epsilon$  ( $\forall i, j$ ) に対して,

$$P_j(Q_j, d_j(p_j)) = \int_0^{Q_j} F_j(x, p_j) dx \leq 1 - \epsilon \quad (13)$$

が成立する. さらに, 正の定数  $M$  が存在して,  $q_{ij} \geq N$  を満たす  $\forall q_{ij}$  について,

$$\frac{\partial f_i(q_i, q_{-i})}{\partial q_{ij}} + \frac{\partial c_{ij}(q_{ij})}{\partial q_{ij}} + \frac{\partial h_j(q_j, q_{-j})}{\partial q_{ij}} + \lambda_j^+ P_j(Q_j, p_j) - (\lambda_j^- + p_j)(1 - P_j(Q_j, p_j)) \geq M \quad (14)$$

が成り立つ.

一つ目の仮定は分布関数  $F_j$  が正規分布のように全域で 0 ではない値を持つような場合には自然な仮定である. 一方, 二つ目の仮定は, ある程度の流通量 ( $q_{ij}$ ) が存在する場合には製品取り扱い費用関数など ( $f_i, c_{ij}, h_j$ ) の限界費用が大きくなることを意味しており, これも現実的な仮定であるといえる. ここで, 仮定 1 のもとで補題 1 を用いることで, 以下の解の存在性についての定理が得られる.

**定理 2.** 仮定 1 が満たされているとき, 変分不等式問題 (10) は少なくとも解の一つを持つ.

次に解の唯一性について考える. まず, 準備として  $j = 1, \dots, n$  に対して, 関数

$$g_j(Q_j, p_j) := \begin{pmatrix} \lambda_j^+ P_j(Q_j, p_j) - (\lambda_j^- + p_j)(1 - P_j(Q_j, p_j)) \\ Q_j - d_j(p_j) \end{pmatrix}$$

を定義する. ここで以下の補題を紹介する [6].

**補題 3.** 関数  $g_j$  が単調であるための必要十分条件は

$$d_j'(p_j) \leq -(4\alpha_j F_j(Q_j, p_j))^{-1} \left( P_j(Q_j, p_j) + \alpha_j \frac{\partial P_j(Q_j, p_j)}{\partial p_j} \right)^2 \quad (15)$$

である. ただし,  $\alpha_j = \lambda_j^+ + \lambda_j^- + p_j$  とする.

小売業者  $j$  から市場  $j$  へ提供される製品の販売価格  $p_j$  は非負であるため、 $\alpha_j$  は正となる。したがって、(15) の右辺は負である。よって、条件 (15) は、市場  $j$  における製品の需要関数  $d_j$  は製品価格  $p_j$  に関する強い意味での減少関数であることを表している。補題 3 を用いることで、変分不等式問題 (10) の解の唯一性について以下の定理を得る。

**定理 4.** 補題 3 の仮定が成り立っているとし、さらに  $g_v$  ( $v = 1, \dots, n$ ),  $c_{ue}$  ( $u = 1, \dots, m$ ,  $e = 1, \dots, n$ ) のうち狭義単調となるものが一つでも存在すると仮定する。この時、変分不等式問題 (10) は解を持つならば唯一である。

## 4 数値実験

### 4.1 求解の方法

変分不等式問題 (11) における集合  $K$  は微分不可能な関数で定義されているため、変分不等式問題から直接解を求めることは困難である。そこで、今回は混合二次錐相補性問題に帰着させる。集合  $K$  は以下の通りに書き直すことができる：

$$K := \left\{ (q^T, p^T, s^T, t^T)^T \mid (q^T, p^T)^T \in \mathbb{R}_+^\sigma, \right. \\ \left. (s_{il}, q_i^T B_{il} M_{il})^T \in \mathcal{K}^{1+n} \ (l = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, m, \ i = 1, \dots, m), \right. \\ \left. (t_{jr}, q_j^T \Gamma_{jr} N_{jr})^T \in \mathcal{K}^{1+m} \ (r = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n, \ j = 1, \dots, n) \right\}.$$

ただし、 $\sigma := mn + n$  であり、 $\mathcal{K}^{1+n}$  と  $\mathcal{K}^{1+m}$  はそれぞれ  $(1+n)$  次元と  $(1+m)$  次元の二次錐である。ここで、 $(1+\zeta)$  次元の二次錐  $\mathcal{K}^{1+\zeta}$  とは以下のように定義されるものである：

$$\mathcal{K}^{1+\zeta} := \left\{ y = (y_1, y_2^T)^T \mid y_1 \geq \|y_2\|, y_1 \in \mathbb{R}, y_2 \in \mathbb{R}^\zeta \right\}.$$

また  $\mathcal{K}^1$  を  $\mathbb{R}_+$  によって定義する。また、 $\mathcal{K}$  と  $\theta(x)$  を次のように定義する：

$$\mathcal{K} := \mathbb{R}_+^\sigma \times \prod_{i=1}^m \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^m \mathcal{K}^{n+1} \times \prod_{j=1}^n \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n \mathcal{K}^{m+1}, \quad \theta(x) := \begin{pmatrix} q \\ p \\ s_{12} \\ M_{12} B_{12} q_1 \\ \vdots \\ s_{mm-1} \\ M_{mm-1} B_{mm-1} q_m \\ t_{12} \\ N_{12} \Gamma_{12} q_{-1} \\ \vdots \\ t_{nn-1} \\ N_{nn-1} \Gamma_{nn-1} q_{-n} \end{pmatrix}.$$

したがって、(11) の  $K$  は  $K = \{x \mid \theta(x) \in \mathcal{K}\}$  と表せる。ゆえに、二次錐を含む変分不等式問題の KKT 条件 (例えば、[16] 参照) から、(11) は次の混合二次錐相補性問題に再定式化できる：

$$\begin{aligned} & \text{Find } (x, \lambda) \in \mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\tau \\ & \text{such that } F(x) - \nabla \theta(x) \lambda = 0, \\ & \theta(x) \in \mathcal{K}, \lambda \in \mathcal{K}, \theta(x)^T \lambda = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

ただし、 $\nu := \sigma + m(m-1) + n(n-1)$ ,  $\tau := \sigma + m(m-1)(n+1) + n(n-1)(m+1)$  である。

## 4.2 数値例

この節では、数値実験を紹介する。今回の実験では、定式化した変分不等式問題 (11) を前節で紹介した二次錐相補性問題 (16) へと変形し、それを二次錐相補性問題を解くためのソフトウェアである ReSNA [8–10] を用いて数値的に求解した。

今回は製造業者、小売業者、市場ともに2つずつ存在するネットワークを想定して実験を行った (図2 参照)。

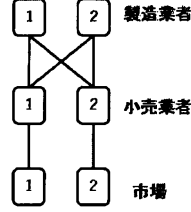


図2: 数値実験で想定するネットワークのイメージ

今回の実験では、製造業者  $i$  ( $i = 1, 2$ ) の製造費用関数  $f_i$  とおよび小売業者  $j$  ( $j = 1, 2$ ) との取引費用関数  $c_{ij}$  を

$$\begin{aligned}
 f_1(q_i, q_{-i}) &= \left( \sum_{j=1}^2 q_{1j} \right) \left( 2 + 2.5 \sum_{j=1}^2 q_{1j} + \sum_{j=1}^2 q_{2j} \right), \\
 f_2(q_i, q_{-i}) &= \left( \sum_{j=1}^2 q_{2j} \right) \left( 2 + 2.5 \sum_{j=1}^2 q_{2j} + \sum_{j=1}^2 q_{1j} \right), \\
 c_{ij}(q_{ij}) &= 0.5q_{ij}^2 + 3.5q_{ij}, \quad (i, j = 1, 2)
 \end{aligned}$$

とし、小売業者  $j$  の製品取り扱い費用関数  $h_j$  ( $j = 1, 2$ ) を

$$h_j(q_j, q_{-j}) = 0.5 \left( \sum_{i=1}^2 q_{ij} \right)^2$$

とした。また、在庫に関するパラメータは  $\lambda_j^+ = \lambda_j^- = 1$  ( $j = 1, 2$ ) とし、市場  $j$  ( $j = 1, 2$ ) における製品の需要  $\hat{d}_j$  は、 $[0, 10/p_j]$  の範囲の一様分布に従うと仮定した。ここで、小売業者の取り扱い費用関数は自身の変数にのみ依存しており、ほかの小売業者の変数には依存していないことを注意しておく。つまり、今回の実験では、不確実性を考慮するのは製造業者のみとなる。一方、製造業者の需要の不確実性を表す行列  $M_{12}$  と  $M_{21}$  として、今回は

$$M_{12} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_{21} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とした。ただし、 $\alpha$  は不確実性の大きさを表す非負のパラメータであり、 $\alpha = 0$  の場合は不確実性が存在しないことを意味し、 $\alpha$  が大きくなるにつれて不確実性も大きくなる。また、 $M_{12}$  と  $M_{21}$  を比較すると (2, 2) 成分が  $M_{12}$  のほうが大きい。これは、製造業者1の製造業者2に対する不確実性のほうが、製造業者2の製造業者1に対する不確実性よりも大きいことを意味している。

図3は不確実性のパラメータ  $\alpha$  を変化させたときの製品の流通量を表している。なお、同じマークを用いた系列は、グラフが重なっていることを意味している。図3を見ると、不確実性が大き

くなるにつれて製造業者1の製品取扱量は減り、製造業者2の製品取扱量は増えている。これは、不確実性の大きな製造業者1が保守的な意思決定を行った結果、製品取扱量が減少し、その分が製造業者2の製品取扱量の増加につながったものととらえることができる。一方、小売業者-市場間の流通量も減少しているため、不確実性が大きくなるにつれてサプライチェーン全体のパフォーマンスが低下していることが分かる。

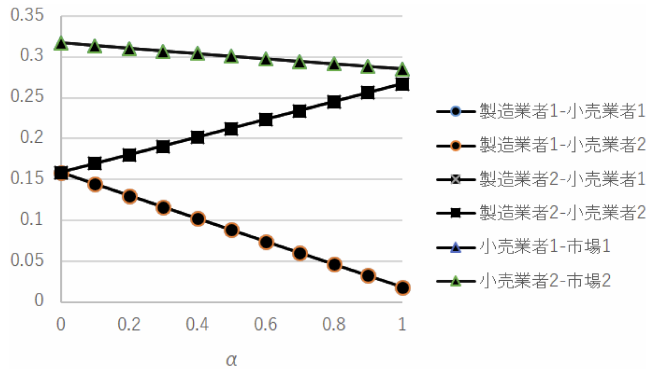


図 3: 製品の流通量の変化

## 5 おわりに

本論文では、需要の変動を考慮したロバストサプライチェーンネットワーク均衡モデルを定式化し、それを変分不等式問題へと再定式化して均衡解の存在性や唯一性について議論した。また、数値実験を行い、不確実性の大きさと流通量の関係について検証を行った。均衡解の存在性や唯一性の保証における条件の緩和や、より詳細な数値実験などは今後の課題である。

## 謝辞

本研究の一部は JSPS 科研費 JP17K00039 の助成を受けて行われている。

## 参考文献

- [1] M. Aghassi and D. Bertsimas, Robust game theory, *Mathematical Programming*, **107** (2006), 231–273.
- [2] A. Baghalian, S. Rezapour and R.Z. Farahani, Robust supply chain network design with service level against disruptions and demand uncertainties: A real-life case. *European Journal of Operational Research*, **227** (2013), 199–215.
- [3] A. Ben-Tal, L.E. Ghaoui and A. Nemirovski, Robust optimization. *Princeton University Press, UK*, 2009.

- [4] A. Ben-Tal and A. Nemirovski, Robust convex optimization. *Mathematics of Operations Research*, **23** (1998), 769–805.
- [5] D. Bertsimas and A. Thiele, A robust optimization approach to supply chain management. In: D. Bienstock and G. Nemhauser eds. *Integer programming and combinatorial optimization*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2004), 86–100.
- [6] J. Dong, D. Zhang and A. Nagurney, A supply chain network equilibrium model with random demands. *European Journal of Operational Research*, **156** (2004), 194–212.
- [7] F. Facchinei, J.S. Pang, *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*, Springer, 2003.
- [8] S. Hayashi, Manual of ReSNA –matlab software for mixed nonlinear second-order cone complementarity problems based on Regularized Smoothing Newton Algorithm–, Technical report in website of ReSNA, (2013) (last accessed October 26, 2017). <http://www.plan.civil.tohoku.ac.jp/opt/hayashi/ReSNA/>
- [9] 林俊介, ReSNA の手引き, オペレーションズ・リサーチ, **59** (2014), 716–724.
- [10] S. Hayashi, N. Yamashita and M. Fukushima, A combined smoothing and regularization method for monotone second-order cone complementarity problems, *SIAM Journal on Optimization*, **15** (2005), 593–615.
- [11] 平野達也 成島康史, サプライチェーンネットワークにおけるロバストな均衡モデルについて, 京都大学数理解析研究所 講究録 2027, 109–124, 2017.
- [12] P.R. Kleindorfer and G.H. Saad, Managing disruption risks in supply chains. *Production and Operations Management*, **14** (2005), 53–68.
- [13] A. Nagurney, *Network Economics: A Variational Inequality Approach*, Springer, 1993.
- [14] A. Nagurney, J. Dong and D. Zhang, A supply chain network equilibrium model. *Transportation Research Part E*, **38** (2002), 281–303.
- [15] M.S. Pishvaei, M. Rabbani and S.A. Torabi, A robust optimization approach to closed-loop supply chain network design under uncertainty. *Applied Mathematical Modelling*, **35** (2011), 637–649.
- [16] J. Sun, J.S. Chen and C.H. Ko, Neural networks for solving second-order cone constrained variational inequality problem, *Computational Optimization and Applications*, **51** (2012), 623–648.
- [17] 山田忠史 今井康治 矢口栄一, 物流業者の行動を考慮したサプライチェーンネットワーク均衡分析, 土木学会論文集 D, **65** (2009), 163–174.
- [18] 山田忠史 繁田健 今井康治 矢口栄一, 在庫を考慮したサプライチェーンネットワーク均衡モデル: 消費需要の不確実性に伴う物資流動量とネットワーク効率性の変化, 土木学会論文集 D, **66** (2010), 359–368.